

## К ВОПРОСУ ОБ ИЗУЧЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Тимербаева Наиля Вакифовна, к.п.н., доцент,  
Гимаддинова Мадина Вильевна, студентка ИМиМ 5 курса,  
Казанский (Приволжский) федеральный университет  
timnell@yandex.ru; madinaa58@mail.ru

*Аннотация:* Статья посвящена анализу существующего положения в изучении тригонометрии. Рассмотрена история развития тригонометрии как науки и как учебного предмета, проведен анализ действующих учебников алгебры средней школы.

*Ключевые слова:* математическая подготовка школьников, тригонометрия, изучение тригонометрии, история тригонометрии, анализ школьных учебников алгебры.

## THE STUDY OF TRIGONOMETRY IN THE COURSE OF MATHEMATICS OF SECONDARY SCHOOL

Timerbaeva Nailya, PhD in Education, Associate Professor,  
Gimaddinova Madina, the student of the 5 course, Kazan Federal University  
timnell@yandex.ru; madinaa58@mail.ru

*Abstract:* The article is devoted to the analysis of the existing situation in the study of trigonometry, of the history of development of trigonometry as a science and as an academic subject, of the analysis of modern textbooks of algebra in secondary school.

*Keywords:* mathematical training of schoolchildren, the trigonometry, the study of trigonometry, history of trigonometry, analysis of school textbooks of algebra.

Говоря о математической подготовке школьников, стоит подчеркнуть большую значимость тригонометрического материала для развития мышления учащихся, а также его роли в дальнейшем образовании и практической деятельности. Но, к сожалению, тригонометрия уже несколько десятилетий не изучается в общеобразовательной школе, как самостоятельный учебный предмет, а разделы программы, связанные с изучением элементов тригонометрии, систематически перекачываются из старшей школы в основную и обратно. При этом постоянно происходит урезание тригонометрии в содержательном плане, что негативно сказывается на качестве усвоения ее основных идей и методов. В результате, большинство выпускников школы отождествляют тригонометрию с набором огромного числа странных формул, которые ни один нормальный человек запомнить не в состоянии.

Для того, чтобы выяснить почему ситуация сложилась подобным образом, попробуем проследить, как исторически переплетались судьбы тригонометрии-науки и тригонометрии-учебного предмета.

История развития тригонометрии напрямую связана с развитием астрономии, т.к. именно для решения ее задач древние математики начали исследовать соотношения различных величин в треугольнике. Часть тригонометрических сведений была известна уже в Древнем Вавилоне и Египте, но основы этой науки были заложены в Древней Греции. Стоит заметить, что греческие математики ещё не рассматривали тригонометрию как отдельную науку, это была часть астрономии.

Главным достижением античной тригонометрической теории стало решение треугольников в общем виде, то есть задача нахождения неизвестных элементов треугольника, исходя из трёх заданных его элементов (из которых хотя бы один является стороной). Впоследствии эта задача и её обобщения стали основной задачей тригонометрии: по заданным (чаще всего, трем) известным элементам треугольника, следовало найти все остальные, связанные с ним величины. Первоначально в число элементов треугольника (известных или неизвестных) включали стороны и углы при вершинах, позже к ним добавились медианы, высоты, биссектрисы, радиус вписанной или описанной окружности, положение центра тяжести и т. д.

Индийские математики IV века, хорошо знакомые с трудами греческих астрономов и геометров, приняв их за основу изменили некоторые концепции тригонометрии, приблизив их к современным.

Дальнейшее развитие тригонометрия получила в IX-XV вв. в странах Среднего и Ближнего Востока. Математики Ал-Хорезми и ал-Марвази (IX век) ввели в рассмотрение наряду новые

тригонометрические функции: тангенс, котангенс, секанс и косеканс. После перевода в XII-XIII вв. арабских трактатов на латынь, многие идеи индийских и персидских математиков стали достоянием европейской науки. Работы Региомонтана, изложенные в его труде «Пять книг о треугольниках всех видов», сыграли значительную роль в развитии тригонометрии в XVI-XVII вв. Как видим, с самого начала в основе тригонометрии находится геометрия, главная цель - решение треугольников и вычисление элементов геометрических фигур. Но начиная с XVII в. ситуация меняется, в развитии тригонометрии намечается новое направление – аналитическое. Считается, что научная разработка тригонометрии осуществлена Леонардом Эйлером (XVIII в). Именно Эйлер создал тригонометрию как науку о функциях, придал ей аналитическое изложение, вывел всю совокупность формул из немногих основных формул. Обозначение сторон треугольника маленькими буквами, а противолежащих углов - соответственно большими, позволило ему упростить все формулы, придав им строгость и простоту. Эйлер предложил рассматривать тригонометрические функции как отношения соответствующих линий к радиусу круга, т. е. как числа, при этом радиус круга как «полный синус» он принял за единицу. Эйлер получил ряд новых формул, установил связь между тригонометрическими функциями и показательными, определил знаки тригонометрических функций для всех четвертей, вывел обобщённую формулу приведения и т.п. Его сочинения легли в основу многих учебников тригонометрии.

Аналитическое построение теории тригонометрических функций, начатое Леонардом Эйлером, получило завершение в трудах великого Николая Ивановича Лобачевского.

Таким образом, можно заключить, что на первых этапах своего развития тригонометрия служила лишь средством для решения вычислительных геометрических задач. Ее содержанием считалось вычисление элементов простейших геометрических фигур, то есть треугольников. Но в современной тригонометрии самостоятельное и столь же важное значение имеет изучение свойств тригонометрических функций [4].

Соответственно развитию науки тригонометрии развивалось и изучение ее как учебного предмета. На первом этапе ее развития содержание учебного предмета совпадало с содержанием науки. Далее содержание науки и учебного предмета начинают различаться. Возникают два направления учебного предмета: аналитическое решение треугольников и изучение свойств тригонометрических функций.

Проследим, как строилось преподавание тригонометрии с учетом этих двух направлений. Первоначально существовала идея дедуктивного изучения тригонометрии как части математики. М.В. Остроградский в 1848 г. предложил систему индуктивного преподавания тригонометрии:

а) в младших классах – изучение тригонометрии острого угла как учения о вычислительных приемах решения треугольников и фигур, сводимых к ним;

б) в старших классах – обобщение понятия тригонометрии острого угла, т.е. изложение основ тригонометрических функций любого действительного аргумента.

Обратимся к Программе средней десятилетней школы за 1949 г. По ней тригонометрия начинает изучаться в 8 классе, в 7 классе предваренная пропедевтикой, состоящей в измерительных работах на местности. Происходит усиление прикладного характера изучаемого математического материала и создается опора для изучения формального курса тригонометрии. В 9 классе тригонометрия уже обретает черты отдельной школьной дисциплины. Подробно изучаются синус, косинус, тангенс и котангенс, секанс и косеканс – в ознакомительном порядке. 10 класс продолжают решением косоугольных треугольников, основанном на теоремах синусов, косинусов с применением соответствующих таблиц.

Таким образом, можно сделать вывод, что в первой половине XX века учителя математики:

- вводили учащихся в тригонометрию так, как осваивало ее человечество – от практических измерений к формальным положениям науки, в соответствии с идеей Остроградского. Тригонометрия – удобный инструмент постепенного введения в методы математического исследования реального мира – от тригонометрии треугольника к тригонометрическим функциям числового аргумента;

- методически аккуратно вводили в курс тригонометрии, с опорой на наглядность, выводы базировались на практических расчетах и практическом применении полученных сведений.

До 1966 г. в 9-х и 10-х классах изучался отдельный предмет «Тригонометрия» параллельно с курсом алгебры. Начиная с середины шестидесятых годов, в ходе подготовки и осуществления реформы школьного математического образования, получившей в дальнейшем название «реформа А.Н. Колмогорова», отношение к тригонометрии стало меняться и со временем изменилось принципиально. Это выразилось в изменении программных целей изучения данного раздела науки в

школе. Он перестал рассматриваться как педагогический инструмент развития мышления, постепенного и целенаправленного приобщения ребенка к основам научной картины мира через освоение элементарной практики построения этой картины. Таким образом, тригонометрический материал стал постепенно «выжиматься» не только из основной школы, но и из курса старшей ступени обучения в школе.

В программах основной школы (1978 г.) о начале изучения тригонометрии даже не упоминается. В настоящее время тригонометрию в школе изучают все меньше и меньше, хотя она традиционно популярна на всевозможных конкурсах и олимпиадах. Также тригонометрия имеет широкое применение на практике, но в школьных учебниках об этом практически ничего не говорится. Ко всему этому курс переполнен формулами, которые дети не запоминают ввиду отсутствия надобности, как им кажется.

В связи с этим нам представляется интересным проанализировать существующее состояние изучения тригонометрии. Для этого проведем сравнительный анализ учебников «Алгебры» для 10 классов средней школы ([1], [2], [3]).

Элементы анализа	Колмогоров А.Н.	Колягин Ю.Н.	Никольский С.М.
<i>Профиль подготовки</i>	Учебник написан на высоком научном уровне, основные теоретические положения иллюстрируются конкретными примерами. Упражнения делятся на две части. Задачи, входящие в первую часть, необходимо уметь решать для получения удовлетворительной оценки, они задают обязательный уровень подготовки, остальные задачи сложнее.	Для учащихся физико-математических классов в учебнике предусмотрено большое количество трудных задач, требующих не только хорошего знания материала, но и творческого подхода. Некоторые темы изучаются только в физико – математических классах.	Авторы считают принципиально важным обучать школьников в рамках разных уровней по одним и тем же учебникам. Тогда учащиеся, заинтересованные в более глубоком изучении математики и не обучающиеся в профильных классах, получают возможность углублять свои познания в математике самостоятельно или под руководством учителя.
<i>Цели изучения</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• получение знаний базового и повышенного уровня сложности по тригонометрии</li> <li>• формирование умений применять полученные знания на практике</li> <li>• обучение построению графиков тригонометрических функций</li> <li>• изучение свойств тригонометрических функций</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• изучение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса. Знакомство с основными формулами тригонометрии;</li> <li>• формирование умений решать тригонометрические уравнения</li> <li>• изучение свойств тригонометрических функций</li> <li>• обучение построению графиков тригонометрических функций</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• получение базовых знаний по тригонометрии</li> <li>• расширение и углубление знаний по тригонометрии (учебники с двумя уровнями подготовки)</li> <li>• систематическое повторение изученного</li> </ul>
<i>Сравнение основных тем</i>	<b>Тригонометрические формулы</b>		
	Учебник 10 класса начинается главы «Тригонометрические функции». О тригонометрическом круге почти ничего не говорится, большое место занимают формулы тригонометрии и таблицы.	Понятие тригонометрической функции еще не вводится, учащиеся изучают числовые выражения и тригонометрические формулы. Это готовит учащихся к рассмотрению тригонометрических функций. Впервые учащиеся доказывают тригонометрические тождества, применяя соответствующие формулы.	Учащимся практически сразу дается понятие арксинуса и арккосинуса угла, много времени уделяется изучению тригонометрического круга. Каждая формула «разжевана» для учащихся, что весьма упрощает понимание тригонометрии в целом.
	<b>Тригонометрические уравнения и неравенства</b>		
	Изучение начинается с введения и рассмотрения обратно-тригонометрических функций. Тема богата большим количеством практических заданий. И только при изучении темы неравенства упор делается на триг. круг.	Изучение главы начинается с решения простейших тригонометрических уравнений, что подготовлено предыдущим материалом.	В учебнике подробно рассмотрены все основные случаи решения тригонометрических уравнений. Неравенства приводятся под звездочкой (*), т.е. для повышенного уровня.

<b>Тригонометрические функции</b>			
	Большое внимание уделено темам: Тригонометрические функции числового аргумента (6 ч). Основные свойства функций Практических заданий не так много, но они разнообразны. Знакомство с системами тригонометрических уравнений. Много материала предложено для изучения четности и нечетности, периодичности функций.	Свойства каждой конкретной тригонометрической функции формулируются с опорой на графическую иллюстрацию. В классах естественного, технического и физико-математического профилей обязательным является навык построения графиков, полученных в результате сдвигов и сжатий (растяжений) вдоль координатных осей.	На тему выделено 6 часов. Подробно рассмотрены все тригонометрические функции числового аргумента Отрицательным моментом является малое количество практических заданий, хотя теория дана в полном объеме.
	<b>Обратно - тригонометрические функции</b>		
	Тема изучается в самом начале главы «Тригонометрические уравнения и неравенства».	Решение тригонометрических неравенств и свойства обратных тригонометрических функций в классах социально-экономического профиля лишь в ознакомительном плане.	Понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса введены в самом начале, после изучения основных формул. Рассмотрены простые примеры, в незначительном количестве. Далее данный материал почти не используется.

Приведем основные характеристики материала, изложенного в рассмотренных учебниках.

Материал, представленный в учебнике Колмогорова А.Н. и др. «Алгебра и начала анализа 10-11 класс», соответствует обязательному минимуму обучения, однако для учащихся 10 класса он является достаточно трудным для понимания, т.к. здесь присутствует чересчур сжатое изложение.

Более того, в данном учебнике использована известная схема изложения материала по тригонометрии – сначала изучаются все известные формулы курса тригонометрии, а потом предлагается решать тригонометрические уравнения. В результате получается, что тригонометрические уравнения и преобразования тригонометрических выражений так и остаются почти несвязанными друг с другом фрагментами. Получается, что формулы изучаются ради формул.

Для ученика 10 класса так и остаются невыясненными (после изучения материала по данному учебнику) следующие факты: что такое аркфункции; как производится отбор корней и т.п.

Материал в учебнике Колягина Ю.Н. и др. «Алгебра и начала анализа 10 класс» соответствует обязательному минимуму обучения, весьма доступен для учащихся 10 класса. На изучение темы отводится 18 часов. При изложении материала по тригонометрии опять используется известная схема изложения материала «функция – преобразования – уравнения». Т.е. снова формулы выведены на первое место, а простейшим уравнениям внимания уделено недостаточно. Отметим, однако, что в данном учебнике частично есть ответ на вопрос учащихся об отборе корней.

В учебнике Никольского С.М. и др. «Алгебра и начала анализа 10 класс» на изучение тригонометрических уравнений отводится недостаточное количество времени, более того, простейшим тригонометрическим уравнениям не уделяется должного внимания, хотя основой для решения любого тригонометрического уравнения служит умение решать именно простейшие тригонометрические уравнения. В данном учебнике совсем не рассматриваются задачи, в которых требуется осуществить отбор корней. Большое внимание уделяется понятиям арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс, но, к сожалению, авторы не поясняют учащимся с какой целью они вводят данные понятия.

Проведенный анализ учебников и программ по математике позволяет сделать вывод о большом объеме содержания и относительно небольшом количестве часов, выделенных на изучение тригонометрии, а также о большой доле формализма при изучении тригонометрии, состоящем в том, что усвоение предмета опирается, главным образом, на запоминание. В связи с этим также стоит выделить основные проблемы, связанные с ее изучением:

- 1) при большом объеме получаемой информации, происходит существенное сокращение часов на изучение данной дисциплины, что приводит к перегрузке учащихся;
- 2) отсутствует мотивация к изучению тригонометрии.

На наш взгляд, существующие проблемы можно решить, учитывая следующие факторы:

- необходима поддержка мотивации учащихся при изучении тригонометрии через синтез ее с другими школьными предметами (физика, география, геометрия, история, экономика и др.). Так, например, тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела, позволяют измерять расстояния до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. А так же в таких областях, как техника навигации, теория музыки, акустика, оптика, анализ финансовых рынков, электроника, статистика, биология, медицина (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтика и т.д.;

- мотивацию учащихся также можно повысить, выделив время на ознакомление с историей возникновения и развития данной науки

- следует добиваться у учащихся отчетливых геометрических представлений, связанных с единичным (тригонометрическим) кругом и графиками функций. Затрачиваемое время окупится при изучении обратных тригонометрических функций.

### **Список литературы**

1) Колмогоров А.Н. Учебник: Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений [Текст]/ А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.; под ред. А. Н. Кологорова. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.: ил.

2) Колягин Ю. М. Учебник: Алгебра и начала математического анализа, 10 класс. [Текст]/ Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин– М.: Просвещение, 2009. – 367 с.: ил.

3) Никольский С. М. Учебник: Алгебра и начала математического анализа, 10 класс. [Текст]/ С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин – М.: Просвещение, 2009. - 430 с.: ил.

4) Решетников Н.Н. Тригонометрия в школе. Лекции 1 – 4. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2010. – 96 с.